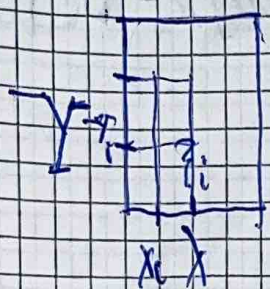


Т. Пусть $X \times Y$ - измеримое в $\mathbb{R}^{m+n}$ и X - м-к в $\mathbb{R}^m$, Y - м-к в $\mathbb{R}^n$. Если $f \in R(X \times Y)$, то

$$\int_{X \times Y} f(x, y) dx dy = \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy$$



$\mathcal{Q}$ -бо P_X -м-к X -проект., $\mathbb{R}$

P_Y -м-к Y

P -м-к $X \times Y$

$$S(f, P) \leq \sigma(F, P_X, \xi) \leq S(f, P)$$

Пусть $\lambda(P_X) \rightarrow 0$, рассмотрим $P_Y: \lambda(P_Y) \rightarrow 0$

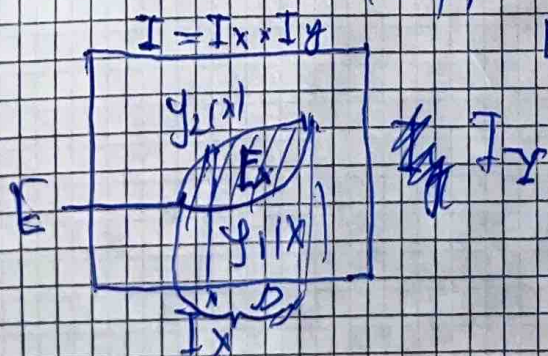
Тогда $\lambda(P) \rightarrow 0$

$$S(f, P) \searrow \int_{X \times Y} f(x, y) dx dy, \quad S(f, P) \nearrow \int_{X \times Y} f(x, y) dx dy$$

Следствие Теоремы Д-опр. м-к в $\mathbb{R}^{n-1}$

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in D: y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \}$$

$$\text{Если } f \in R(E), \text{ то } \int_E f(x, y) dx dy = \int_D dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$



Def. Sei $\Gamma_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_1 = x, y_2 \leq y_2(x)\}$

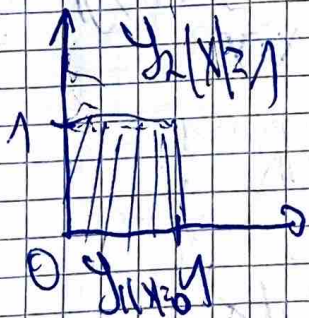
Zusammenhang, also $\chi_E(x, y) = \chi_D(x) \chi_{\Gamma_x}(y)$

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_{D \subseteq E} f(x, y) dx dy = \int_{I_x} dx \int_{\Gamma_x} f(x, y) \chi_D(x) dy =$$

$$= \int_D \left(\int_{\Gamma_x} f(x, y) dy \right) dx$$

Beispiel 1 Berechnen $I = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy$,

wo $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$



$$\iint_S (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) dy$$

$$= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 =$$

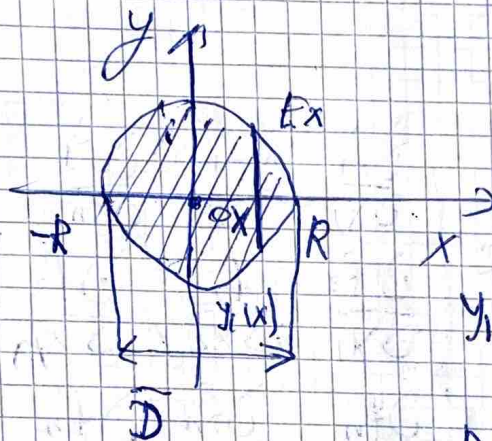
$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} x \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3}$$

Пример 2 Вычислим интеграл
интегрирования в двойном интеграле

$$I = \int_D f(x, y) dx dy, \text{ где область } D$$

$$D = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$



$$\sqrt{R^2 - x^2} = R$$

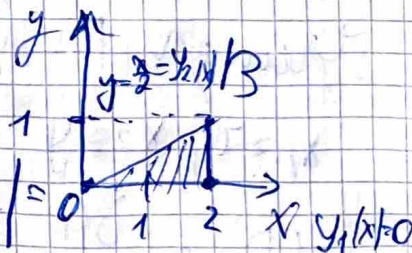
$$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$I = \int_D f(x, y) dx dy = \int_{-R}^R dx \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y) dy \right)$$

Пример 3 Вычислим $I = \iint_S x^2 y dx dy$, где

S - треугольник с вершинами

$O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 1)$



$$\int_S \int x^2 y dx dy = \int_0^2 dx \left(\int_0^{x/2} x^2 y dy \right)$$

$$= \int_0^2 x^2 dx \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{x/2} = \int_0^2 x^2 dx \frac{x^2}{8} = \frac{1}{8} \int_0^2 x^4 dx = \frac{1}{8} \left(\frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{8 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

§3 Задача определения и вычисления
вероятности

ОП Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

~~***~~

$$J(F) \stackrel{\text{ОП}}{=} \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

наз. матрица Якоби, оп-ция F , а ее
определитель $\det J(F)$ наз. якобиан
оп-ции F .

Пример $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $x = r \cos y$, $y = r \sin y$
 $x_1 = r$, $x_2 = y$, $f_1 = r \cos y$, $f_2 = r \sin y$

$$J(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -r \sin y \\ \sin y & r \cos y \end{pmatrix}$$

$$\det Y \cdot |F| = \cos y \cdot r \cdot \cos y - (-r \sin y) / \sin y = \\ = 2 / \cos^2 y + \sin^2 y / 2r$$

Т. / $\partial \delta$ ограничено отложением.

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ открыт, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ преобразование, оно функции в U все различные

выражб. первого ранга - на произвольном произвольном пер. в m . $x_0 \in U$. Пусть $y = f(x_0)$.

Можно, если $\det \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0}$ открыт, f в m . то открыт от нуля, то $\exists \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall y \in \mathbb{R}^n$.

$$|y - y_0| < \epsilon \exists! x \in U: |x - x_0| < \delta$$

Т. Пусть $y: B(y_0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, определён-
но под отображением $y \mapsto x$ пер. в
в m . $y_0 \in U$ $dy_{y_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)^{-1}$

Т. Пусть $y: D_1 \rightarrow D_2$ гомеоморфизм.

открыт, открыт от $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ на m и n и

открыт $D_2 = y(D_1) \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$ и $\text{supp}(f)$ - компактно в D_2 . Тогда $\int f(x) dx =$

$$= \int_{D_1} f(y(t)) / |\det Y_1(y)| dt$$

Уже g -вер. Пусть D_x — н-во в $\mathbb{R}^n$,

$f \in R(D_x)$ и $Y: D_1 \rightarrow D_n$ — отображение
 $(t \mapsto Y(t))$ н-во $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на D_x .

По нашей задаче, уже $f \in Y$
помогает φ -но t , так что,

$$\int_{D_x} |f(x)| dx = \int_{D_t} \varphi(t) dt?$$

Спрогнозируем, что D_t — параллелепипед $I \subset \mathbb{R}^n$

и $Y: I \rightarrow D_n$ — гомеоморфизм, т.е. н-во н-во
на D_x . Тогда разб. н-во I на н-во

$I_1, I_2, \dots, I_n$ с помощью разбиения н-во
 D_n на н-во $Y(I_1), Y(I_2), \dots, Y(I_n)$

Если все эти н-во измеримы и φ —
почти все н-во, то н-во н-во φ

$$\text{то } \int_{D_x} |f(x)| dx = \sum_{i=1}^n \int_{Y(I_i)} |f(x)| dx, \text{ если } f \text{ непрерывна на } D_n, \text{ то по мере } \varphi \text{ справедливо}$$

$$\int_{Y/I_2} f(x) dx = f(\xi_i) \mu(Y/I_2), \text{ где } \xi_i \in Y/I_2.$$

Если $\det Y$ равно нулю,
 Y/I_1 сам по себе вырожден, тогда
 нулевым будет $|\det Y(Y)| \mu(I_1)$. Если $T_i = Y^{-1}(\xi_i)$
 то T состоит из точек, где-то лежащих
 на оси-а. Если $\det Y$ не равно нулю,
 $\mu(Y/I_1) = |\det Y(Y)| \mu(I_1)$

$$\text{Если } Y(x) = Y(I_1) \cup Y(I_2) \cup \dots \cup Y(I_k) \cup \dots \cup Y(I_n).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^k \int_{Y/I_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^k f(Y/I_i) |\det Y(Y)| \mu(I_i).$$

В пределе при $x(p) \rightarrow 0$

Пример (Универсальная функция-трансформация).

$$\text{Пусть } I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

$$I^2 = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y^2} dy = \int_S e^{-x^2 y^2} dx dy,$$

$$\text{где } S = \{(x, y) | 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty\}$$

$$x = r \cdot \cos y, y = r \sin y$$

$$I^2 = \iint_S e^{-r^2} / r \, dr \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} \, dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \left[y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{because: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx =$$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot 2 = \sqrt{\pi}$$