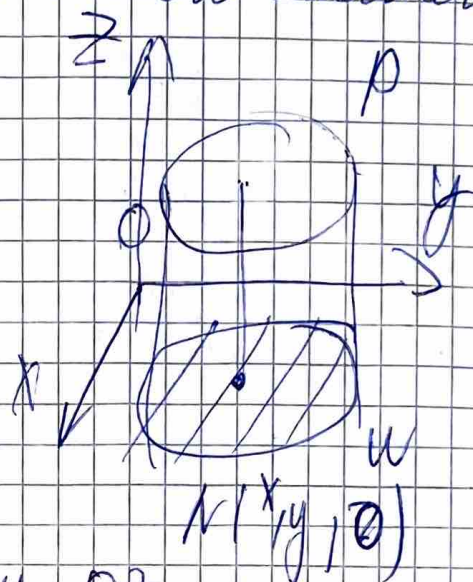
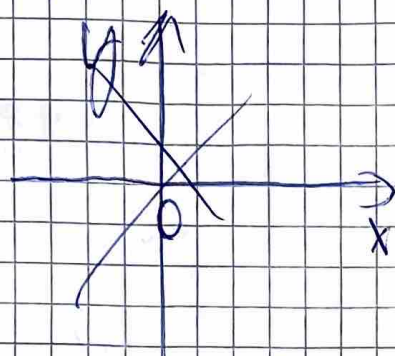


11.3 График и минимизация ф-ии от двух переменных

Пусть $z = f(x, y)$. С ф-ей f мы связали
 мн-во w - мн-во точек плоскости $\mathbb{R}^2$,
 график



Добавим нулевой ось

ОПР Совокупность пар (x, y, z)
 мн-во w т. $M(x, y, f(x, y))$, являющаяся
 образом перенесения
 плоскости Oxy . Если т. N задана
 в координатах (x, y, z) , то
 мн-во w мн-во точек (x, y) в
 плоскости Oxy , соответствующих
 т. N с помощью ф-ы $z = f(x, y)$.
 мн-во w мн-во точек (x, y) в
 плоскости Oxy , соответствующих
 т. N с помощью ф-ы $z = f(x, y)$.

Поверхность P под графиком ф-ии
 $z = f(x, y)$.

[ОПР] Семейство уровней ρ -ин $f(x, y) =$

это мн-во всех точек из множества

$\mathbb{R}^2$, где f равна некоторой

константе c , т.е. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = c$

пример семейств уровней ρ -ин $z = x^2 + y^2$

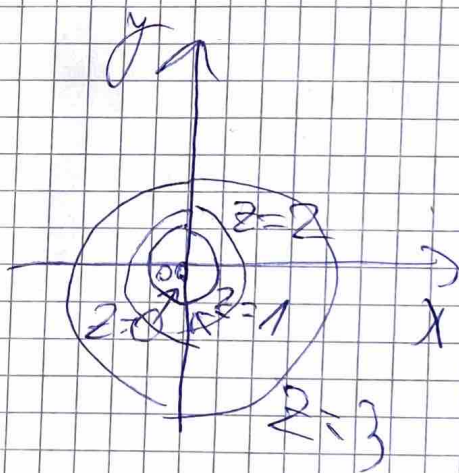
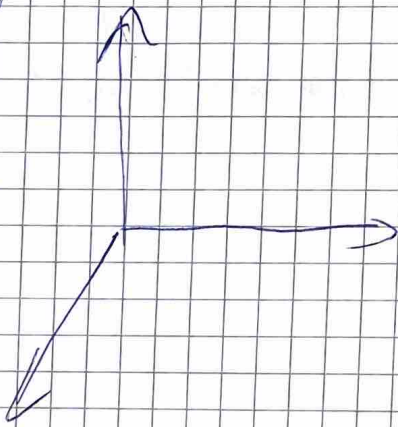
Добавим z неогр. зр-м $z = 0, 1, 2, \dots$

получим семейство уравнений,

для уравн $x^2 + y^2 = 0$ - точка;

$x^2 + y^2 = 1$ - окружность с $y, 0, 0$ радиус 1

$x^2 + y^2 = 2$ - окр-ть с $y, 0, 0$ радиус $\sqrt{2}$, и т.д.



Таким образом семейство уровней - семейство концентрических окружностей с $y, 0$. Поэтому эти линии можно назвать поверхностями ρ -ин ρ -ин с односторонним выносом.

График ρ -ин $z = x^2 + y^2$ напоминает конус с круго радиусом $\sqrt{z}$ высотой z , поверхность конуса выноса, что

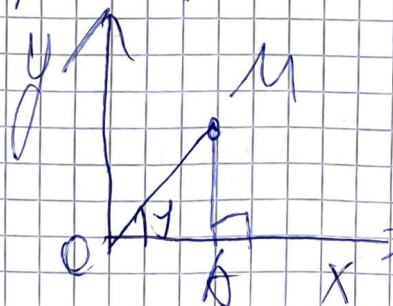
В любой полярной системе координат ρ - φ z радиус-вектор.

МЧ Полярная система координат. Возьмем по оси z т. O полярную точку M . Проведем луч OM и на нем отложим от O отрезок $OM = \rho$.



Соединим O и M - получим полярный радиус ρ . Точка M с полярными координатами (ρ, φ) называется полярными координатами точки M . Точка M с полярными координатами (ρ, φ) записывается как $M(\rho, \varphi)$. Вспомогательный радиус ρ $\in [0; +\infty)$, $\varphi \in [0; 2\pi)$. Перенесем на полярные координаты и обратимся к декартовым.

Точка M с полярными координатами (ρ, φ) записывается как $M(\rho, \varphi)$. Вспомогательный радиус ρ $\in [0; +\infty)$, $\varphi \in [0; 2\pi)$. Перенесем на полярные координаты и обратимся к декартовым. Пусть $OM = \rho$, $\angle MOA = \varphi$. Тогда $OA = x$, $AM = y$. Тогда $M(x, y)$ и $OM = \rho$, $\angle MOA = \varphi$.



Тогда $M(x, y)$ и $OM = \rho$, $\angle MOA = \varphi$. Тогда $OA = x$, $AM = y$. Тогда $M(x, y)$ и $OM = \rho$, $\angle MOA = \varphi$.

(в прямоугольном, где y - острый)
из $\triangle AOM$ $|OM|^2 = |OA|^2 + |AM|^2$

$$\operatorname{tg} y = \frac{|AM|}{|OA|}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y = \operatorname{arctg} \frac{|AM|}{|OA|}$$

$$|OA| = |OM| \cdot \cos y, \quad |AM| = |OM| \cdot \sin y$$

$$x = \rho \cos y$$

$$y = \rho \sin y$$

н 5 непрерывности

Типы $X \subseteq \mathbb{R}^m$

ОПД Типы $\delta > 0$, мн-во $B(a, \delta) =$
 $= \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a, x) \leq \delta\}$

наз-ся шаром с центром $a \in \mathbb{R}^m$
 радиусом δ .

$$x = (x, y)$$

$$a = (x_0, y_0)$$

$$B(a, \delta) = \{ (x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq \delta \}$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \delta^2$$

мн-во $G \subseteq \mathbb{R}^m$ наз. открытым
 (относительно $\mathbb{R}^m$), если $\forall x \in G$

$\exists$ такой $B(x, \delta)$ малый, что $B(x, \delta) \in G$

• Последовательность точек $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathbb{R}^m$ наз. сходящейся в точку $x_0 \in \mathbb{R}^m$, если последовательность точек $d(x^{(n)}, x_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}$$

• Теорема - определение нуля функции непрерывной го-м

Пусть $X \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}$, a - предельная т.

ли-ва X , $Y \in \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow Y$

следующие условия являются необходимыми

$$1) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (0 < d(x, a) < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

• Если любая последовательность точек $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ из X , сходящаяся к a такова

и точек $x^{(n)} \neq a \forall n$, выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = b$$

В любой из этих случаев имеет

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Пусть $z = f(x, y)$.

~~Пусть~~ ~~приращение~~

Пусть переменная x прирастет на Δx , а переменная y останется неизменной. Тогда приращение $\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ наз-ся частным приращением $f(x, y)$ по переменной x .

Аналогично, $\Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ наз-ся частным приращением $f(x, y)$ по переменной y .

Когда обе переменные x и y получат одновременно приращения Δx и Δy , тогда приращение $\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ наз-ся полным приращением $f(x, y)$ или просто приращением.

Здесь рассматриваются т. (x, y) , $(x + \Delta x, y)$, $(x, y + \Delta y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ из $\text{Dom } f$.

Рассмотрим приращение Φ -ии

$$f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2, \text{ где}$$

x увеличился от 2 до 2,2 и

y см 1 до 0,9.

$$\Delta x = 0,2 \quad \Delta y = -0,1$$

$$f(2,1) = 2^2 + 2 - 1^2 = 4$$

$$f(2+0,2, 0,9)$$

$$f(2,2, 0,9) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 0,9 - 2 \cdot 0,9^2 = 5,2 - 4 = 1,2$$

Этот пример показывает, что
~~линейное приближение~~

$$\Delta f(x,y) \neq \Delta x \cdot f'_x(x,y) + \Delta y \cdot f'_y(x,y)$$

Следствие: Если $\varphi = \Delta f(x,y)$ непрерыв-
на в $\tau(x_0, y_0)$, то

1) $(x_0, y_0) \in \text{Dom } f$ и (x_0, y_0) - предельная
точка $\text{Dom } f$

2) Бесконечно малое приращение

$$\Delta x = x - x_0 \text{ и } \Delta y = y - y_0$$

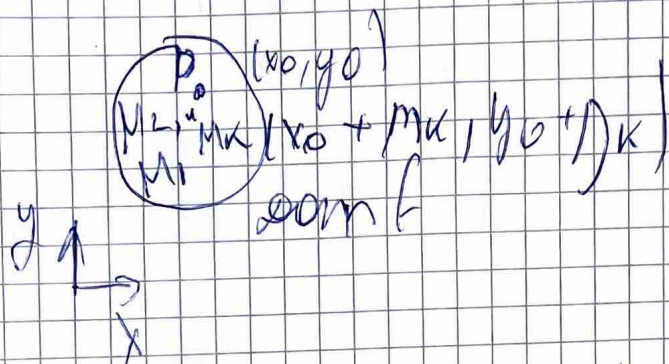
переменным x и y соответственно

Бесконечно малое приращение
 $\Delta f(x_0, y_0)$ φ -ли $f(x,y)$, т.е.

В окрестности точки

$M_k(x_0 + \mu_k, y_0 + \eta_k)$, принадлежащая
к множеству $P(x_0, y_0)$, выполнено, где ε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x_0 + \mu_k, y_0 + \eta_k) - f(x_0, y_0)] = 0$$



[ОПР] Функция $z = f(x, y)$ наз. непрерывн. в

данной точке, если она непрерывна в каждой точке этой области

Пример 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывн.

Положим $g(x, y) = f(x + 0y)$ - непрерывн.

оп-н. от x, y .

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) = g(x_0, y_0)$$

$$\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \rightarrow x_0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$