

Коллоквиум 4

1. Определение независимости абсолютно непрерывных случайных величин через плотности;

Плотностью распределения будем называть любую такую функцию $f(t)$, что

Функция f неотрицательна: $\forall t \in \mathbb{R}$ выполняется $f(t) \geq 0$

Функция f нормирована: $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds = 1$

$\xi_1, \dots, \xi_n$ - независимые, если называют $f_{\xi}(t_1, \dots, t_n) = f_{\xi}(t_1) \cdot \dots \cdot f_{\xi}(t_n)$

Случайная величина ξ называется *абсолютно непрерывной*, если существует неотрицательная функция f на $\mathbb{R}$ такая, что $\forall A \subset \mathbb{R}$ верно $\mathbb{P}(\xi \in A) = \int_A f_{\xi}(s)ds$

Функция плотности одной случайной величины не зависит от значений, принимаемых другой.

2. Определение независимости случайных величин через функции распределения;

Пусть абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет плотность $f_{\xi}(\cdot)$

Функцию $F_{\xi}(t) = \mathbb{P}(\xi < t) = \int_{-\infty}^t f_{\xi}(s)ds$ называют *функцией распределения* случайной величины ξ

Случайные величины ξ и η независимы, если их совместная функция распределения $F(\xi, \eta)$ равна произведению их одномерных функций распределения $F(\xi, \eta) = F_{\xi}(\xi) \cdot F_{\eta}(\eta)$

3. Формула свёртки для суммы двух абсолютно непрерывных распределений;

$$f_{\xi+\eta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(s) f_{\eta}(t-s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(t-s) f_{\eta}(s)ds$$

4. Математическое ожидание для абсолютно непрерывных случайных величин;

Пусть абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет плотность $f(\cdot)$.

Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} sf(s)ds$ называют *математическим ожиданием*

5. Формула для нахождения плотности линейного преобразования абсолютно непрерывной случайной величины;

Пусть абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет плотность $f(\cdot)$. Тогда

случайная величина $a\xi + b$ имеет плотность $\frac{1}{|a|} f\left(\frac{-b}{a}\right)$

6. Определение квантили для случая строго возрастающей функции распределения, общее определение квантили;

Общее: Для функции распределения $F(x)$ квантиль q_p для вероятности p ($0 < p < 1$) определяется как $q_p = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq p\}$

Если функция распределения $F(x)$ является строго возрастающей, то для любой вероятности p существует единственное значение x , такое что $F(x) = p$. В этом случае квантиль просто находится как обратная функция $q_p = F^{-1}(p)$

7. Что такое медиана для дискретного распределения?

Медиана для дискретной случайной величины — числовая характеристика случайной величины, равная значению случайной величины для которой вероятность меньших значений меньше 0,5 и вероятность больших значений меньше 0,5.

8. Распределение, равномерное на отрезке: плотность и функция распределения;

Для равномерного распределения на отрезке $[a, b]$ плотность вероятности постоянна

$(f(x) = \frac{1}{b-a}$ для $x \in [a, b]$), а функция распределения равна нулю до a , равна $\frac{x-a}{b-a}$ в пределах отрезка и единице после b .

9. Экспоненциальное (или показательное) распределение: плотность и функция распределения;

Экспоненциальное распределение: $e^{-\alpha t}$ на $[0; +\infty)$ (параметр $\alpha > 0$)

Плотность: $\alpha e^{-\alpha x}$ при $x \geq 0$ и $f(x) = 0$ для $x < 0$

Функция распределения: $1 - e^{-\alpha x}$ для $x \geq 0$ и $F(x) = 0$ для $x < 0$

10. Нормальное распределение: плотность и функция распределения;

Ядро: $e^{-\frac{t^2}{2}}$

Плотность: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

Функция распределения: $\int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

11. Стандартное нормальное распределение: плотность и функция распределения.

Ядро: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$

Стандартное нормальное распределение: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Плотность: $\int_{-\infty}^z \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

<https://habr.com/ru/articles/730936/> - для понимания распределений

Распределение	Ядро $f(t)$
Равномерное на отрезке $[a; b]$	1 на $[a, b]$
Стандартное нормальное	$e^{-t^2/2}$
Экспоненциальное (параметр $\alpha > 0$)	$e^{-\alpha t}$ на $[0; +\infty)$
Лапласа (параметр $\alpha > 0$)	$e^{-\alpha t }$
Гамма (параметры $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$)	$t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}$ на $[0; +\infty)$
Бета (параметры $\alpha > 0$ и $\beta > 0$)	$t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}$ на $[0, 1]$
Коши	$\frac{1}{1+t^2}$