

Lemma: Пусть $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$D^B |x-a|^\alpha \Big|_{x=a} = \begin{cases} 0, & B \neq \alpha \\ \alpha!, & B = \alpha \end{cases}$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = 0$$

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_n| = \alpha \quad \alpha = (0, \dots, 0)$$

$$x^{(0)} = x_1^0 \dots x_n^0$$

Т. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ - вып., $f \in C[x], \gamma \geq 2, a \in x$.

Тогда $\exists$ полином P степени $\leq \gamma$

сн n раз-н: $f(x) - P(x) = o(|x-a|^\gamma)$
 при $x \rightarrow a$. Тогда полином единствен-
 ый и $P = \sum_{|\alpha| \leq \gamma} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha$

До-во: Суть Пусть $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq \gamma} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha$

Очевидно $f - P \in C^2$

$$f(a) = P(a) = f(a) - f(a) = 0$$

Возьмем произвольный шаг h и $B; |B| \leq \gamma$

$$\begin{aligned} D^B (f - P)(x) &= D^B f(x) - D^B P(x) = \\ &= D^B f(x) - \sum_{|\alpha| \leq \gamma} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} D^B (x-a)^\alpha \end{aligned}$$

$$D^B (f - P)(a) = D^B f(a) - \sum_{|\alpha| \leq \gamma} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} D^B (x-a)^\alpha \Big|_{x=a}$$

$$\Big|_{x=a} = D^B f(a) - \frac{D^B f(a) B!}{B!} = 0$$

Теорема 1. $f(x) - P(x) = o(|x-a|^2)$ при $x \rightarrow a$

Следствие. Если P_1 многочлен степеней ≤ 1

он n раз $-n$: $f(x) - P_1(x) = o(|x-a|^2)$ при $x \rightarrow a$

Очевидно $P - P_1$ — многочлен степеней ≤ 1 и

$$P(x) - P_1(x) = f(x) - P_1(x) = (f(x) - P(x)) +$$

$$= o(|x-a|^2) \text{ при } x \rightarrow a,$$

по алгебре $P - P_1 \equiv 0$

Следствие (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

В предположении теоремы

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o(|x-a|^n),$$

где $o(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$

§ 2 Экстремумы ф-и нескольких переменных

111 Необходимое усл-е экстремума

ОПР Точка определенно точкой максимума называется внутренняя точка области определения, содержащая эту точку и некоторая окр-сть этой точки (прямая или окр-ть)

ОПР Стр. максимум ф-ии $f(x, y)$, (стр. минимум)

наз-я точка значение $f(x_1, y_1)$ этой ф-ии, которое больше всех её значений в некоторой окр-ти $m(x_1, y_1)$

Максимум или минимум ф-ии $f(x, y)$ наз-я экстремум этой ф-ии,

а точка, в которой достигается

Экстремум, наз-я точкой экстремума

(точк. точкой максимума или точкой минимума)

Аналогично опр-я экстремум ф-ии $f(x, y, z)$ и т.д. (необходимое усл-е). В точке экстремума ф-ии несл. пер-я каждая её частн. производ. 1-го порядка либо равна нулю, либо не существует

② - во Точке где градиент $u = f(x, y)$
и нулю $\nabla f(x, y) = 0$, которая будет иметь
значение в $x = x_0$. Из этого следует,
что для $\nabla f - \nabla u$ получаем

① - $\frac{d|u|}{dx} \Big|_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0)$ wenn $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ ist
 sonst, d.h. $f'_x(x_0, y_0) = 0$ dann ist es eine
 stationäre Stelle.

Следствие В окр-ти экстремума $M_0(x_0, y_0)$ граф ф-ции $f(x, y)$ выписано рав-во:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Аналогично, если задан ф-я $F(x, y, z)$ и если
жизненный в $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

ОПР Показ, в котором машина провозит
1 провозной пакет, ф-ии вида равны 0,
вид не сдвигивается, показан кривиче-
вой

Замечание 1 Точка экз-ма ун-то;

- Минимумов нет, перемены могут быть лишь в критических точках.

Замечание 2 Ун-е неоренно гомогенно не экв-ца

Пример $f(x, y) = x, y$ $M_0(0, 0)$

$$f'_x(x, y) = y, f'_y(x, y) = x, f'_x(0, 0) = 0, f'_y(0, 0) = 0$$

- Но в окр-ти $M_0(0, 0)$ нет ни одной точки $A(\epsilon, \epsilon), B(-\epsilon, \epsilon) (\epsilon > 0)$ при этом, что $f(A) = \epsilon^2 > 0 = f(M_0)$ и $f(B) = -\epsilon^2 < f(M_0) = 0$

Пример 2. Из всех прямоугольников, периметр которых, известен сумму длины, ширины и объема равно a , найти тот объем которого наибольший.

Пусть в основании пар-дн ун-ка со сторонами x и y , а высота z

$$V = xy z, x + y + z = a \text{ тогда } V = xy(a - x - y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = y(a - 2x - y), \frac{\partial V}{\partial y} = x(a - x - 2y), \mu$$

$$\begin{cases} a - 2x - y = 0 \\ a - x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ 2y + x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{3} \\ y = \frac{a}{3} \\ z = \frac{a}{3} \end{cases}$$

112. Аксиоматическое определение

Для матрицы $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ненулевой вектор v , $Av = \lambda v$ наз-е собственным числом, соответствующим собствен. в-ру λ .

Пример, $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$, ненулев. числ.

Т. Все корни характеристического многочлена симметричной матрицы вещественны, и каждый ненулевой корень есть собствен. число λ -в-го. Пусть $A = A^T \in M_{n,n}$. Пусть λ -корень хар. мн-га A . Тогда $\exists v \in \mathbb{C}^n$ т.ч.

$Av = \lambda v$. Транспонирование уравн. матриц. v^T, A, v размеров $1 \times n, n \times n, n \times 1$.

Получим число, т.е. $\frac{v^T A v}{v^T v} = \lambda$

$$\text{Имеем } a = \frac{v^T A v}{v^T v} = \frac{v^T A v}{|v|^2} = \lambda \frac{|v|^2}{|v|^2} = \lambda$$

$$\text{где } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0$$

Покажем, что $a \in \mathbb{R}$

$$\bar{a} = \bar{\lambda} = \overline{\frac{v^T A v}{v^T v}} = \frac{\overline{v^T A v}}{\overline{v^T v}} = \frac{v^T A v}{v^T v} = a$$

$$= \frac{v^T A^T v}{v^T v} = \frac{v^T A v}{v^T v} = a. \text{ Из (1) следует } \lambda \in \mathbb{R}$$

ОПР Симметричная $n \times n$ -матрица

• A наз. положительно определенной (или определенно отрицательной) если $\forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$
 $v^T A v > 0$ ($v^T A v < 0$) ~~или $A > 0$ ($A < 0$)~~

или $A > 0$ ($A < 0$)

$\neg A > 0 \Rightarrow$ все $n-1$ минор Δ_k положительно

• линейно, т.е. $d_1 = a_{11}$

$$d_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad d_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\dots, \quad d_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$\forall n \times A > 0 \Leftrightarrow \forall k$ все k -ые миноры A положительно

миноры

• ПЗ Пусть X - точка в $\mathbb{R}^n$: $f \in C^2(X)$

рассматриваем переменные $x_1, \dots, x_n$, p -матрица из $\mathbb{R}^n$ матрица H , составленная из вторых частных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ в точке X .
 Тогда p -матрица H положительно p -определенна

• $H^T = H$

7 (Зам. ун.) Пусть X отпр. в $\mathbb{R}^n$,
 $f \in C^2(X)$, тогда $p \in X$ макс., или
 $\nabla f|_p = 0$. тогда

1) Если $H|_p > 0$, то p -точка строго
 минимума

2) Если $H|_p < 0$, то p -точка строго
 макс.

3) Если $H|_p$ indef., или $H|_p$ вырожд.
 или положително, или и отриц., или
 нуль, то p -я абс-я точка не
 есть.

Угол γ в $f(x) = f(p) + \sum_{|k|=1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} |x-p|^k +$
 $+ \sum_{|k|=2} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} |x-p|^2 + o(|x-p|^2)$

Т. Пусть X окр. в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(X)$. Тогда
 р. из X : $\forall f|_p = 0$. Тогда 1) Если $H|_p > 0$,
 то p - м. экстр. мин 2) Если $H|_p < 0$, то p - м.
 экстр. макс. 3) Если средн. значение f на
 окр. U_p есть как наклон макс. или
 мин. и окр. или не окр., то p не абс. экстр.-
 мум.

Тогда разл. $f(x) = f(p) + \sum_{|\alpha|=1} \frac{D^\alpha f(p)}{\alpha!} (x-p)^\alpha +$
 $+ \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(p)}{\alpha!} (x-p)^\alpha, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad p = (p_1, \dots, p_n)$

$$\sum_{|\alpha|=1} \frac{D^\alpha f(p)}{\alpha!} = \sum_{i=1}^n \frac{D_i f(p)}{1!} (x_i - p_i) = \nabla f|_p (x-p) = 0$$

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(p)}{\alpha!} (x-p)^\alpha = \frac{1}{2} d^2 f(p) [dx-x-p] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - p_i) f''_{x_i x_j} (x_i) (x_j - p_j) =$$

$$= \frac{1}{2} (x-p)^T H|_p (x-p) = h$$

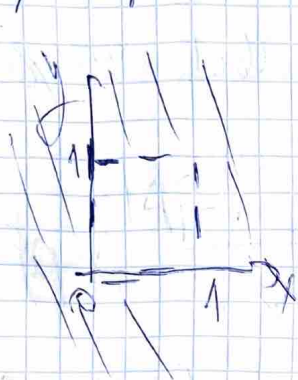
$$f(x) - f(p) = h + o(|x-p|^2)$$

Если $H|_p > 0$, то $h \Rightarrow p$ - м. экстр. мин $\square$

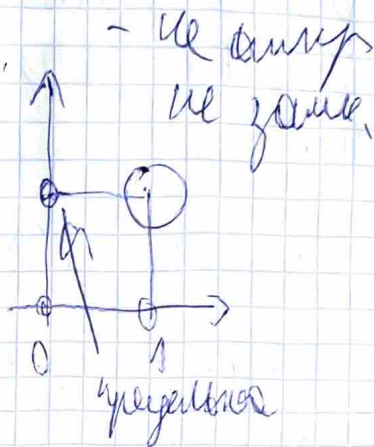
114. Теорема Вейерштрасса

ОПР. Пусть $K \subseteq \mathbb{R}^2$. Мы бо K наз. зам-
 кнутым, $\mathbb{R}^2 \setminus K$ - открыт

Пример 1 $K = [0, 1] \times [0, 1]$ Пример 2 $K = [0, 1] \times \{0\}$



$\mathbb{R}^2 \setminus K$ - открыт



ОПР. Пусть некое лев-во m и n
 (или произвольная)

Площа M наз. внутренней для m и n , если

она принадлежит G внешне с m и n
 открыто. Площа N наз. границей
 для m и n , если в любой её точке
 открыт или m или n , как принадлежащая
 G , или a не принадлежащая G .

ОПР. Совокупность T всех граничных
 точек наз. его границей. Мы бо
 $G = G \cup T$ наз. замкнутой областью

Однако не ограниченной, если она
 существенно содержит внутри
 края замкнутого множества.

Пример $K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$

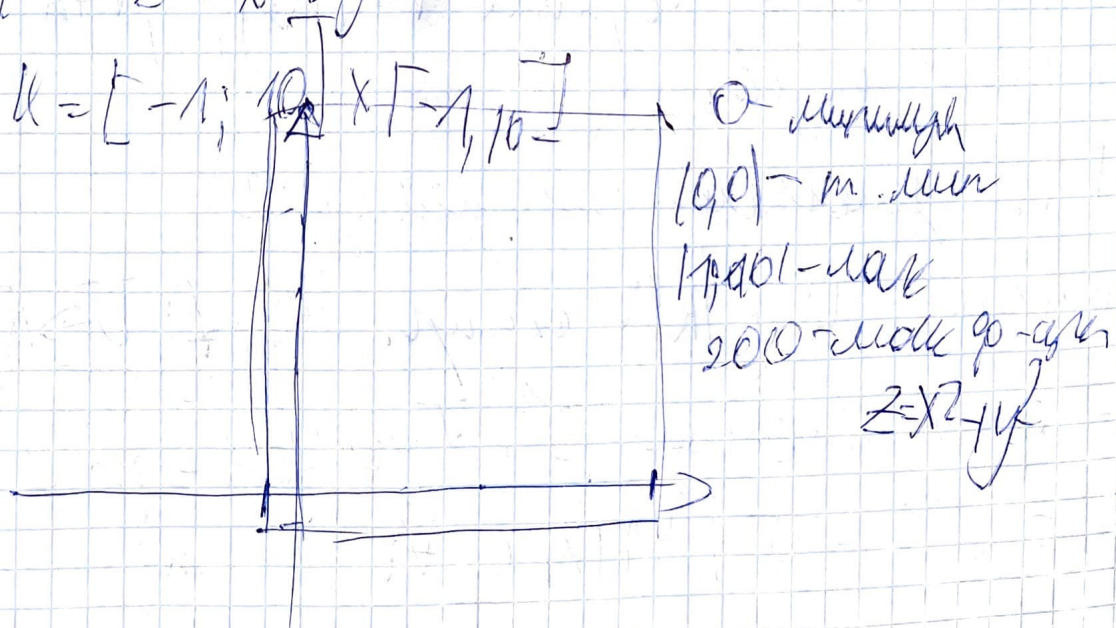
Одн-то, её граница - окружность

$$x^2 + y^2 = 1, \quad \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \} \text{ - зам. одн-то}$$

Т. Вейерштрасса) $\mathbb{R}^2$, пер. в ограничен-
 ной и замкнутой одн-ти, достигает
 своего наименьшего и наибольшего знач-
 ания

Пример $z = x^2 + y^2$

$$K = [-1; 1] \times [-1; 1]$$



П5 Условие экстремума.

Многочисленные локальные

экстремума φ -а $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, но не интересуют ее минимумы (или максимумы) не на всем $\mathbb{R}^n$, а только на множестве, удовлетворяющем системе уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

ОМР системы φ -а $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ азов, регулярной в x_0 , если $\nabla \Phi_1(x_0), \dots, \nabla \Phi_m(x_0)$ линейно независ.

Т (об условном экстремуме)

Пусть $U \in \mathbb{R}^n$ - окр. $\Phi_i, f: U \rightarrow \mathbb{R}, i=1, \dots, m$ - φ -а класса C^1 . Пусть $4 \leq m \leq n$,
 $S = \{x \in U \mid \Phi_i(x) = 0 \forall i = 1, \dots, m\}$

Пусть $x_0 \in S$ - м. экстремума φ -а

f на S . Тогда или система φ -уравн $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ абн-а регулярной в x_0 ,

поиским образы, ищется решение уравнения. (*) должно выполняться ун-ах

$$\Phi_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = \Phi_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Кроме того $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \nabla f \in \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla \Phi_i$ (*, *)

Пример $f = x^2 + y^2, \Phi_1 = xy - 1$

(x_0, y_0) - м. экстремума оп-тимиз

$$\begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \quad -\frac{\lambda_1}{2} = \frac{x_0}{y_0} = -\frac{y_0}{x_0} \Rightarrow$$

$$x_0^2 = y_0^2 \text{ \& } x_0 y_0 = 1 \neq 0, x_0^2 = \frac{1}{x_0}, x_0^3 = 1$$

$$\Rightarrow x_0 \neq 1, y_0 = x_0 \text{ и тогда } f = x_0^2 + y_0^2$$

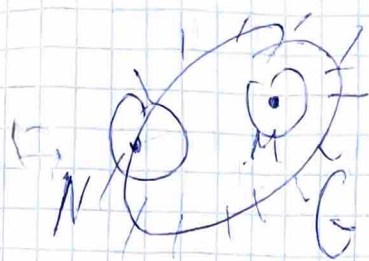
на $S = \{(x, y) | xy - 1 = 0\}$ имеет экстремум минимума $(-1, -1)$ и $(1, 1)$

$$\min f(x, y) = 2$$

Куб

Задача. Из множества (**) выбрать,

что минимально $x_i^2 = 1, \dots, m$ определена ортогональн, если-б-бы $\nabla \Phi_i \neq 0, i=1, \dots, m$, и не было разрывов



Пример, квадратичная форма
симметричного квадратичного

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

на сфере $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = 1$

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \lambda \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 - 1 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} x_i x_j + \dots + a_{in} x_n x_i + a_{in} x_i x_n)$$

$$- 2 \lambda x_i = 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - 2 \lambda x_i = 0, \quad i=1, \dots, n$$

$$= 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i)^2 = 1$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j x_i - 2 \lambda \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = 0$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \lambda \sum_{i=1}^n (x_i)^2$$

Следовательно, λ - собственное значение A
задаваемое, а $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ - соответствующий
вектор. Этого л.о. выбираем в качестве

Замечание Нормальность векр. на
 единич. сф. эквив. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1\}$
 ф-я $(x^* x)$ всегда принимает в неко-
 торой ее макс. наиб. значение, но
 миним. $\begin{pmatrix} x^* x \\ x^* x \end{pmatrix}$ группа имеет решение
 Лемма: любая вещ. симметричная
 матрица имеет по крайней мере
 одно вещ. собств. зн.

ОПР Пусть $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ - квадратная.
 Максимум $x \in \mathbb{R}^n \mapsto x^T A^T A x$ на сфере $\|x\|_2^2 = 1$
 обозначается $\|A\|_2^2$. $x^T A^T A x = |Ax|^T Ax =$
 $= \|Ax\|_2^2$. Миним. $\|A\|_2$ наз. сингулярн.
 нормой матрицы, т.е. $\|A\|_2 = \sqrt{\max_{\|x\|_2^2=1} \|Ax\|_2^2}$

ОПР Спектр матрицы - это набор $\lambda \in \mathbb{C}$
 собственных чисел.

Ф-я $\|\cdot\| : M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ наз. нормой, если
 $\|A\| > 0$, или $A \neq 0$
 $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$$2) \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$3) \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| ; \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$