

Коллоквиум 6

1. Состоятельность оценки;

Оценкой параметра θ будет называть любую функцию от выборки $\theta_n^*(x_1, \dots, x_n)$

Оценка θ_n^* параметра θ состоятельна, если

$$\forall \epsilon P(|\theta_n^* - \theta| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Будем тогда писать $\theta_n^* \xrightarrow{P} \theta$

2. Несмещенность оценки;

Оценка θ_n^* параметра θ несмещённая, если $E\theta_n^* = \theta$

3. Функция правдоподобия (для абсолютно непрерывных случайных величин);

Функцией правдоподобия называем $\Phi_n(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)$

4. Как определяется оценка максимального правдоподобия через функцию правдоподобия;

Оценкой метода максимального правдоподобия (ММП) называют $\theta_n^* = \operatorname{argmax}_\theta \Phi(\theta; x_1, \dots, x_n)$

5. Функция правдоподобия и логарифмическая функция правдоподобия для распределения Бернулли;

Функция правдоподобия — это совместная вероятность наблюдать данные при данном p , рассматриваемая как функция параметра p :

$$L(p|x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i|p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}.$$

$$\text{Пусть } S = \sum_{i=1}^n x_i, \text{ тогда } L(p) = p^S(1-p)^{n-S}$$

$$\text{Логарифмическая функция: } \ell(p) = \ln L(p) = \ln [p^S(1-p)^{n-S}] = S \cdot \ln p + (n-S) \ln(1-p)$$

6. Байесовская постановка задачи оценки параметра: что такое априорное и апостериорное распределения?

Байесовская постановка задачи (дискретный параметр)

Дано: 1) θ — случайная величина с известным распределением (априорное) с не более чем счётным множеством значений H

2) $x_1, \dots, x_n \sim F_\theta$ — выборка из распределения с этим параметром.

Надо: апостериорное распределение θ

$$\text{Обновление: } P(H_j|\bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\}) = \frac{\Phi_{H_j}(x_1, \dots, x_n) \cdot P(H_j)}{\sum_{i=1}^n \Phi_{H_i}(x_1, \dots, x_n) \cdot P(H_i)}$$

$$\text{Для Абсолютно непрерывного параметра: } q(t|\bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\}) = \frac{\Phi_{H_j}(x_1, \dots, x_n) \cdot q(t)}{\int_{\mathbb{R}} \Phi_{H_i}(x_1, \dots, x_n) \cdot q(t) dt}$$

7. Сопряжённое априорное распределение.

Если $x_1, \dots, x_n$ — выборка из F_θ , то семейство распределения параметра $\theta \sim G_\alpha$ называют сопряженным априорным распределением, если после Байесовского обновления априорное распределение параметра θ принадлежит семейству G_θ

8. Бета распределение: его ядро, плотность, математическое ожидание и дисперсия;

$$\text{Ядро: } B(\alpha, \beta) = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$$

$$\text{Плотность: Нормировочная константа } - \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, f(x|\alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, 0 \leq x \leq 1, \text{ иначе } 0$$

$$\text{Матожидание: } E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$\text{Дисперсия: } D(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

9. Некорректное априорное распределение (improper prior).

Пусть параметр θ . Априорная плотность $\pi(\theta)$ называется некорректной, если $\int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = \infty$