

ЛЕКЦИЯ №3 МЕТ. ант. ди. анализ.

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow$
 $\forall (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in X: x^{(n)} \rightarrow a \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = b$ $(x^{(n)} \neq a)$

Пример 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерыв. Пусть $g(x, y) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$
 непрерыв. во всей плоскости

Пример 2 $z = ax^2 - 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$
 непрерыв в $\mathbb{R}^2$

Пример 3. Вычислим $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2} - 2}$

[VMP] Пусть $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2} - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -4$

$M_k(x_k, y_k)$ - произв. $\sqrt{x_k^2 + y_k^2} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} M_k(x_k, y_k) \lim_{k \rightarrow \infty} f(M_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_k^2}{\sqrt{4 - M_k^2} - 2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^2 + y_k^2}{\sqrt{4 - x_k^2 - y_k^2} - 2} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(M_k) = -4 \end{aligned}$$

Пример 4. Пусть $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$.
 Вычислим $\exists$ ли предел

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

Пределами $\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = A$

Тогда, полагая $M_k(x_k, \cancel{x_k})$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(M_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \arctg \frac{y_k}{x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k}{x_k} =$$

$$= \arctg 1 = \frac{\pi}{4} = A$$

Тогда полагая $M_k(x_k, 2x_k)$ $\lim_{k \rightarrow \infty} f(M_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \arctg \frac{2x_k}{x_k} =$

Противоречие $= \arctg 2$

§2 Полные производные и дифференциалы

П1 Числовые производные

Пусть $z = f(x, y)$

где f - функция

Опр $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} =$

наз-ет полной производной по-м $z = f(x, y)$ по переменным x

и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$

Аналогично $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

— пог. частной производной $z = f(x, y)$ по y
 Аналогично определ-я частные производ-
 ные для ф-и z и более переменных.
 Замечание. Частная производная
 ф-и от независимых переменных

• полная производная по ф-ии,
 когда получена, если все
 независимые переменные данной
 ф-ии, кроме соответствующих
 аргументов, считать постоянными,
 т. е. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d}{dx} f(x, y), \text{ где } y = \text{const, и т.д.}$

• Пример 1 Пусть $z = x^3 \sin y + y^4$

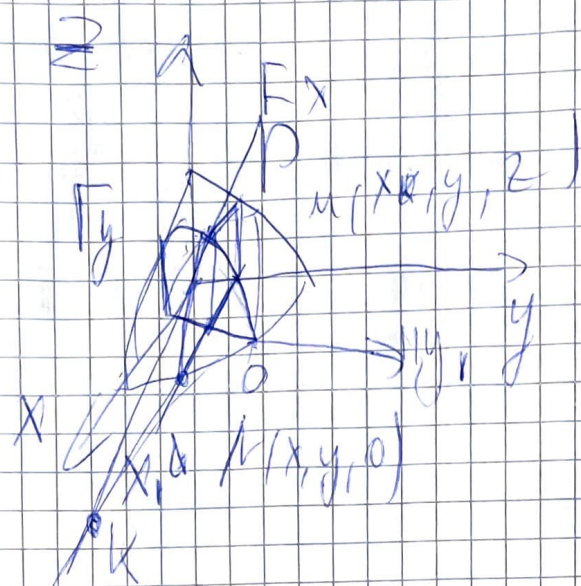
Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y, \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y + 4y^3$

Аналогично вычисл. частные производ-
 ф-ии $u = f(x, y, z)$ по x, y, z

Пример 2 $u = x^6 - y^4 + 3z^5$

• Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^5, \frac{\partial u}{\partial y} = -4y^3, \frac{\partial u}{\partial z} = 15z^4$

Решим задачу, пусть $z = f(x, y)$



Проблем, через M и n $\Pi_1 \parallel O_x z$
 и $\Pi_2 \parallel O_y z$. Прямая MP - нормаль
 к поверхности. P в точке $M(x, y, z)$, $z = f(x, y)$
 z -проекция образов, с ~~кон~~ ~~кон~~ ~~кон~~ O_x
 т.е. $\frac{\partial z}{\partial x} = \left. \frac{dz}{dx} \right|_{y=\text{const}}$, но $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x$

Аналогично $\Pi_y = P \cap \Pi_2$

y -проекция образов, с ~~кон~~ O_y ~~кон~~ ~~кон~~
 M y в точке M и ~~кон~~ Π_y

Итак $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y$

112. Полное дифференцирование

Пусть $z = f(x, y)$ — ф-я x, y

Полное приращение $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

представляет собой разность значений ф-ции z в $M(x, y)$ и $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

Обозн. ρ — радиус, $\Delta x, \Delta y$

М и M' , т.е. $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Если $\rho \rightarrow 0$ можно допустить величину A и B так, что выражение $A\Delta x + B\Delta y$ будет отличаться от Δz на величину $o(\rho)$, то это выражение наз. полным линейным приращением, dZ

ОПР. Полное дифференцирование

ф-ии $z = f(x, y)$ есть разб. перем. x и y наз. полным дифференциалом этой ф-ии. Обозначают $dZ = A\Delta x + B\Delta y$

ОПР. Ф-я, имеющая полный дифференциал в данной

обл-сти, наз. дифференцируемой в этой обл-сти

УМР

Если φ - 2 глф-ли, то
она непрерывна

Пример контр-глф-ли φ -ли
 $z = xy$

для положительных $x > 0, y > 0$.

Пояр φ -ли z , можно рассмотреть
вектор поля векторного поля

со сторонами x и y , давая сторонам
 x и y приращения Δx и Δy получим

приращение Δz
(маленькое, почти 0)



$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = xy + x\Delta y + \Delta x y + \Delta x \Delta y$$

$$\Delta x \cdot \Delta y - \cancel{xy} = x\Delta y + \Delta x y + \Delta x \Delta y$$

Получим малое значение приращ.
при $\rho \rightarrow 0$, составляя из малых
со сторонами $y, \Delta x$ и $x, \Delta y$, если

глф-ли dz , получим $dz = y\Delta x + x\Delta y$

Итак, диф-ал φ -ин равен

1) вполне определенному на множестве производных

Этот φ -ин на дифференцируемых
комбинированном неабелевом алгебраическом
структурах.

В частности $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

(вспомогательная диф-ал неабелева,

переносит образ с его производными)

2) Свойства дифференцируемого φ -а в $\mathbb{R}^n$ -м
имеют эквивалентные формулировки.

Пример 1 Найти дифференциал
 φ -ин $z = x^y$

• $\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow$

$\Rightarrow dz = y x^{y-1} dx + x^y \ln x dy$

~~Замечание~~

Теорема (о дифференциальном φ -интеграле)
Если φ -ин $z = f(x, y)$ задан на

непр. множестве производных

1) в каждой точке φ -ин $z = f(x, y)$ дифференцируемый
2) в этой точке φ -ин

Задача Дано, что

ф-я $u = f(x, y, z)$ имеет напр.

норм. град. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, то

полностью дифференцируема

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Пример 2 Найти градиент ф-и

$$u = \frac{x}{y} e^z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x e^z}{y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x}{y} e^z$$

$$\Rightarrow du = e^z \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy + \frac{x}{y} dz \right)$$

имеет вид

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + df(x, y)$$

когда $|\Delta x|, |\Delta y|$ малы

Пример 3 Дан вектор в точке

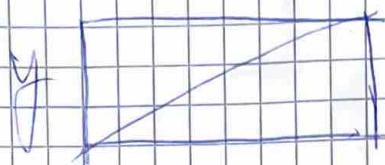
$$x = 0 \text{ и } y = 2$$

найти направление, в котором

а стороны у уменьшились на

10 см.

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$x = 6$$

x

$$y = 8 \quad \Delta x = 0,05$$

$$\Delta y = -0,1$$

$$\Delta R \approx \frac{x \Delta x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y \Delta y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\approx \frac{6 \cdot 0,05}{1000} - \frac{8 \cdot 0,1}{1000} =$$

≈ 5 см уменьшились