

Коллоквиум 5

1. Определение сходимости последовательности случайных величин по вероятности

Последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине X , если для любого $\epsilon > 0$ выполняется условие: $\lim \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$

2. Формулировка закона больших чисел

Пусть $x_1 \dots x_n$ - независимые и одинаково распределенные (н.о.р или i.i.d)

Тогда

1) $\mathbb{E}S_n = n\mathbb{E}X_1$ ($= n \cdot \mu$ - матожидание)

2) $\mathbb{D}S_n = n\mathbb{D}X_1$ ($= n \cdot \sigma^2$ - стандартное отклонение)

3) Вероятность того, что S_n отклоняется от $n\mu$ больше, чем на ϵ , не больше

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathbb{D}X_1}{n\epsilon^2} \text{ или } \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1\right| > \epsilon\right) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

3. Формулировка центральной предельной теоремы

Определение лектора →

Пусть $x_1, \dots, x_n$ - последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин таких, что $0 <$

$\mathbb{D}x_1 < \infty$. Обозначим их сумму через $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

Тогда для любого множества $A \subseteq \mathbb{R}$ | $\mathbb{P}\left(A < \frac{S_n - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n\mathbb{D}X_1}} < B\right) \approx N_{0,1}(B) - N_{0,1}(A)$, где $\frac{S_n - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n\mathbb{D}X_1}}$ - стандартизация S_n

Определение из интернета →

Сумма достаточно большого числа независимых случайных величин, имеющих одинаковое или приблизительно одинаковое распределение, стремится к нормальному распределению, независимо от того, каким было исходное распределение

4. Что такое стандартизация случайной величины?

Если X - случайная величина, тогда будем называть её стандартизацией $X^{(st)} = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\mathbb{D}X}}$

Другими словами: это преобразование случайной величины так, чтобы её **математическое ожидание стало равно нулю, а стандартное отклонение — единице**.

5. Определения ковариации и корреляции

Ковариацией случайной величины X и Y называют $cov(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$

Корреляцией X и Y называют $\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X\mathbb{D}Y}} = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X\mathbb{D}Y}}$

6. Дисперсия: обе формулы

Дисперсией случайной величины ξ будем называть

$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$ - мера разброса от среднего

$$\mathbb{E}(x - \mathbb{E}x)^2 = \mathbb{E}(x^2 + (\mathbb{E}x)^2 - 2x\mathbb{E}x) = \mathbb{E}x^2 + (\mathbb{E}x)^2 - 2[\mathbb{E}x] \cdot \mathbb{E}x = \mathbb{E}x^2 - 2(\mathbb{E}x)^2 + (\mathbb{E}x)^2 = \mathbb{E}x^2 - (\mathbb{E}x)^2$$

7. Правило трёх сигм

Пусть Y - стандартная нормальная случайная величина, тогда из её симметричности имеем:

$$\mathbb{P}(-C < Y < C) = N_{0,1}(C) - N_{0,1}(-C),$$

$$1 - \mathbb{P}(-C < Y < C) = \mathbb{P}(|Y| > C) = 2\mathbb{P}(Y > C) = 2(1 - N_{0,1}(C))$$

Три сигмы:

1) $\mathbb{P}(-1 < Y < 1) = 68.27\%$

$$\mathbb{P}(Y > 1) = \mathbb{P}(Y < -1) = 15.87\%$$

2) $\mathbb{P}(-2 < Y < 2) = 95.45\%$

$$\mathbb{P}(Y > 2) = \mathbb{P}(Y < -2) = 2.28\%$$

3) $\mathbb{P}(-3 < Y < 3) = 99.73\%$

$$\mathbb{P}(Y > 3) = \mathbb{P}(Y < -3) = 0.14\%$$

8. Правила вынесения константы из-под знака математического ожидания и дисперсии

Если $\alpha = \text{const}$, то $\mathbb{E}(\alpha x) = \alpha \mathbb{E}x$, $\mathbb{D}(\alpha x) = \alpha^2 \mathbb{D}x$

9. Формула дисперсии суммы двух случайных величин

$$\mathbb{D}(X \pm Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y \pm 2\text{cov}(X, Y)$$