

Лекция 11

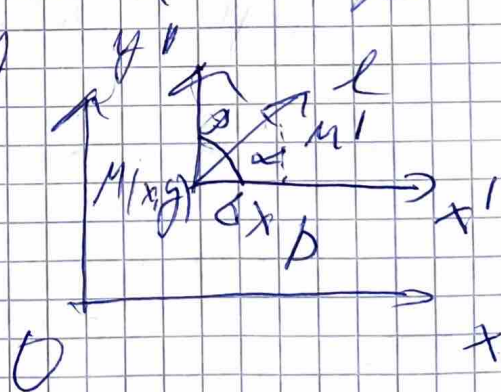
Мет. ант. и ант.

- ПЗ. Трансформация по направлению
 Опр Базис $\alpha, \beta, \gamma \mid 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi \mid$ унз,
 образующий вектор γ с коор осями,
 косинусы $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ наз.
 направляющих косинусов векто-
 ра γ . Вектор γ проецируется в Oxy

$\Leftrightarrow \cos \gamma = 0$

Опр Пусть $u = f(x, y)$, φ - а функция,
 най в одн-ти u

Векторным м. $M(x, y) \in u$ и направле-
 ние, определяются $\cos \alpha$ и $\cos \beta$



При перемещении в направлении $M(x, y)$
 в точку $M'(x + \delta x, y + \delta y)$ φ - а $u = f(x, y)$
 получим приращение,
 $\delta u = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y)$, которое
 наз. приращением φ -ан в направ. l

Если $|r| = \Delta l$ — это величина
 перемещения м. М, то из $\Delta M P$
 $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta l \cos \beta$ (1)
 $\Rightarrow \Delta u = f(x + \Delta x \cos \alpha, y + \Delta y \cos \beta) - f(x, y)$

Отр $\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}$ — мы производим
 ф-ии в направлении l .

Замечание 1 $\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$ — производная ф-ии
 и в том направлении $\partial x / \partial y$

Замечание 2 — мы $\frac{\partial u}{\partial l}$ даёт скаляр
 значение ф-ии в напр. l

Пример для производной по напр.
 для функ. ф-ии $u = f(x, y)$

$$\Delta l u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \Delta f, \text{ где}$$

$\delta \rightarrow 0$ при $\Delta l \rightarrow 0$

$$\text{из (1)} \quad \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \delta \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta$$

Пример 1 Найти приращение

Ф-ции $u = x^2 + 2xy - y^2$ при переходе от $M(1, 2)$. В напр. l , образ. угол: $= \arctan \frac{3}{4}$ с осью напр. осей Ox на напр. $\Delta l = 0.1$. чему равно приращение $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке M ?

имеем $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{4}{5}$

Напр косинуса $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ $\cos \beta = \sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Delta x = \Delta l \cos \alpha = 0.08$, $\Delta y = \Delta l \sin \alpha = 0.06$

$x_1 = x + \Delta x = 1.08$, $y_1 = y + \Delta y = 2.06 \Rightarrow$

$u = (1.08)^2 + 2 \cdot 1.08 \cdot 2.06 - (2.06)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 5$
 $= 0.3724$

Далее $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x - 2y$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M=6} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M \cos \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M \cos \beta = 0. \frac{4}{5} + (-2) \cdot \frac{3}{5} = -3.6$

$f(1, 2) = \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta = 3.724 - 3.6 = 0.124$

Аналог, где угол Ф-ции $u = f(x, y, z)$ с осью $l(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

полна $\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial y}{\partial y} \cos \beta +$

$+\frac{\partial y}{\partial z} \cos \gamma$

и т.д.

ОПР

Точка M называется точкой максимума функции $u = f(x, y, z)$ на множестве G , если для всех $(x, y, z) \in G$ выполняется $u(M) \geq u(x, y, z)$.

Точка M называется точкой минимума функции $u = f(x, y, z)$ на множестве G , если для всех $(x, y, z) \in G$ выполняется $u(M) \leq u(x, y, z)$.

Пример: температура воздуха, т.е. распределение температуры в пространстве, т.е. распределение температуры в пространстве.

Если M и N в Oxy , то $u(M) = u(N)$.

Свойства: 1) Если $u = f(x, y, z)$ имеет экстремум в точке M , то $\nabla u(M) = 0$. 2) Если $u = f(x, y, z)$ имеет экстремум в точке M , то $\Delta u(M) > 0$ (для максимума) или $\Delta u(M) < 0$ (для минимума).

Пример: Скорость ветра - это функция от координат x, y, z .

ОПР Тобоем, что в данной области

- определено поле, если заданы u, v .
 u и v заданы нечетно. Величина $a = F(u, v)$ (3)

Пример: поле определено в дан. момент
времени и ток потока энергии;
поле определено при помощи энергии,
и т.д.

- Для случая поля велич. поля (3)
(u в м. Оху) мы будем иметь велич.
р-но

$$u = F(x, y) \quad || \quad (x, y) \in W \quad (4)$$

$$u_x = F_1(x, y) \quad u_y = F_2(x, y) \quad (5)$$

Вывод: заданы только велич. поля

- (4) $\Rightarrow$ заданы функции скаляр (5)

Аналогично, для случая трехмерного поля

$$u = F(x, y, z) \quad (6) \quad \text{или}$$

$$u_x = F_1(x, y, z), \quad u_y = F_2(x, y, z), \quad u_z = F_3(x, y, z) \quad (7)$$

Вывод: поле велич. поля в 3-х измерениях

- поле велич. поля (7)

ОМР Функция $u = f(x, y)$ - задана на области D и имеет. Тогда $\nabla u = \text{grad} f =$

ОМР $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ под углом α к оси Ox или повороте $\vec{r} u = \vec{e}_i \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_j \frac{\partial u}{\partial y}$

где $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_j$ - единичные векторы, направленные по осям Ox и Oy

Аналогично, для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ во всем пространстве

вектор $\nabla u = \text{grad} f = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$

Вектор. Скалярное поле порождает векторное поле - поле градиентов.

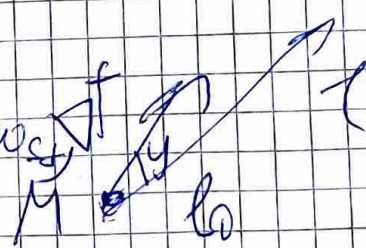
ТЕОРЕМА 1 Производная скалярного поля в данном направлении

равна проекции градиента поля на ось, определенную данным направлением

$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad} u \cdot \vec{l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) =$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma =$$

$$= (\nabla f, \vec{l}) = |\nabla f| \cdot |\vec{l}| \cos \gamma =$$



$$= |\nabla f| \cos \gamma$$



Пример

Векторное, Градиент в скалярном поле в данной точке по величине и направлению равен максимальной скоростью изменения поля в этой точке.

Замечание Из следствия вытекает, что градиент поля не зависит от выбранной системы координат. Пусть градиент СК Ox_1y_2

Пример Найти величину и направление градиента поля, $u = \frac{x}{y} + z^2$ в точке $M_0(2, 1, 0)$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = \frac{1}{y} = 1 \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = -\frac{x}{y^2} = -2$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = 2z = 0$$

$$\nabla u \equiv |\nabla u| = i - 2j \quad |\nabla u| = \sqrt{5}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \gamma = 0$$

ОМР точка M_0 , в которой $\nabla f|_{M_0} = 0$
может оказаться

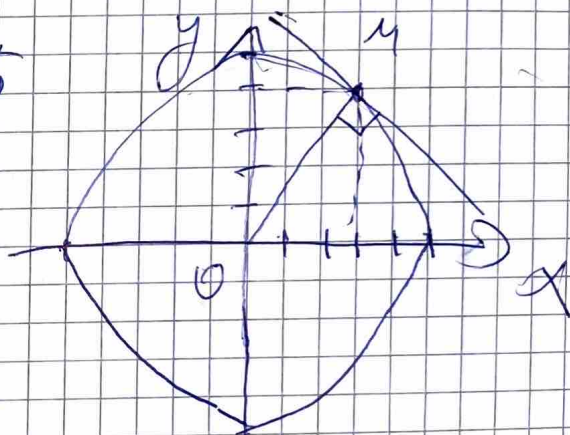
Твердая то бывает не может
точке макс. или мин. - тогда имеет
направлен по нормали линии уровня
проходящей через эту точку

Пример $f(x, y) = x^2 + y^2$ $M(3; 4)$

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 = C \\ 3^2 + 4^2 = C \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} x^2 + y^2 = 25$$

$$\nabla f = (2x, 2y)$$

$$\nabla f|_M = (6, 8)$$



П5. Частные производные высшего
порядка

$z = f(x, y)$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$ наз. вто-
рые частные производные